

УДК 517.95

**ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ  
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ****А.Н.ИСКЕНДЕРОВА***Институт Математики и Механики НАНА*  
*nizameddin @ hotbox.ru*

*В работе исследована одна нелокальная обратная краевая задача для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной (в определенном смысле) задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.*

**Ключевые слова:** обратная краевая задача, параболическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Известно, что [1] при математическом моделировании различных процессов физики, химии, экологии, биологии часто возникают задачи, когда вместо классических краевых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Задачи такого типа называют нелокальными задачами. Исследование таких задач вызвано не только теоретическими интересами, но и практической необходимостью.

Впервые систематическое исследование нелокальных начально-краевых задач было проведено в [2]. В частности, были поставлены и исследованы пространственно нелокальные задачи для определенного класса эллиптических уравнений. Впоследствии, в [3] задача, сформулированная в [4], была названа задачей Бицадзе - Самарского, и были предложены методы решения задач указанного типа для общих эллиптических уравнений.

И наконец, краевые задачи с нелокальными условиями возникают при исследовании некоторых обратных задач.

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с неклассическим условием.

### Постановка задачи и сведение её к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$a_1(t)u_t(x,t) + a_0(t)u(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области  $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  обратную краевую задачу с не-локальным условием

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

граничным условием

$$u(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

неклассическим краевым условием

$$u_{xxx}(0,t) - b u_{xx}(0,t) + a u_x(0,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где  $x_0 \in (0,1)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\delta \geq 0$  - заданные числа,  $a_1(t) > 0$ ,  $f(x,t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $h(t)$  - заданные функции, а  $u(x,t)$  и  $a_0(t)$  - искомые функции.

**Определение.** Классическим решением задачи (1)-(5) назовём пару  $\{u(x,t), a_0(t)\}$  функций  $u(x,t)$  и  $a_0(t)$ , обладающих следующими свойствами:

- 1) функция  $u(x,t)$  непрерывна в  $D_T$  вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и условие (4);
- 2) функция  $a_0(t)$  непрерывна на  $[0,T]$ ;
- 3) все условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

**Лемма1.** Пусть  $\delta \geq 0$ ,  $0 < a_1(t) \in C[0,T]$ ,  $\varphi(x) \in C[0,1]$ ,  $f(x,t) \in C(D_T)$ ,  $h(t) \in C^1[0,T]$ ,  $h(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ) и выполняется условие согласования

$$\varphi(x_0) = h(0) + \delta h(T). \quad (6)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций  $u(x,t)$  и  $a_0(t)$ , обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (1)-(5), из соотношений (1)-(4),

$$a_1(t)h'(t) + a_0(t)h(t) = u_{xx}(x_0,t) + f(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

**Доказательство.** Пусть  $\{u(x,t), a_0(t)\}$  является решением задачи (1)-(5). Из (5) видно, что

$$u_t(x_0,t) = h'(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (8)$$

Далее, из (1) имеем:

$$a_1(t)u_t(x_0,t) + a_0(t)u(x_0,t) = u_{xx}(x_0,t) + f(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

Отсюда, с учетом (5) и (8), приходим к выполнению (7).

Теперь предположим, что  $\{u(x, t), a_0(t)\}$  является решением задачи (1)-(3), (7), причем выполнено условие согласования (6). Тогда, из (7) и (9), получаем:

$$a_1(t) \frac{d}{dt}(u(x_0, t) - h(t)) + a_0(t)(u(x_0, t) - h(t)) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

Введем обозначение

$$y(t) \equiv u(x_0, t) - h(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (10)$$

и запишем последнее соотношение в виде:

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (11)$$

Из (10), с учетом (2) и (6), нетрудно видеть, что

$$y(0) + \delta y(T) = \varphi(x_0) - (h(0) + \delta h(T)) = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что общее решение (11) имеет вид:

$$y(t) = ce^{-\int_0^t \frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)} d\tau} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (13)$$

Отсюда, с учетом (12), получаем:

$$c(1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)} d\tau}) = 0. \quad (14)$$

В силу  $\delta \geq 0$ , из (14) получим, что  $c = 0$ . Подставив последнее в (13) заключаем, что  $y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$ . Следовательно, из (10) ясно, что выполняется и условие (5). Лемма доказана.

### Сведения из теории спектральных задач и введение некоторых пространств

Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1)-(4), методом разделения переменных, приходим к спектральной задаче [5,6]:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

$$y(1) = 0, \quad (a - \lambda)y'(0) + \lambda by(0) = 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (16)$$

которая имеет только собственные функции  $y_k(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x))$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , с положительными собственными числами из уравнения  $tg\sqrt{\lambda} = (a - \lambda)/(b\sqrt{\lambda})$ . Нулевой индекс присваиваем любой собственной функции, а все остальные нумеруем в порядке возрастания собственных чисел.

В работе [5,6] сформулированы и обоснованы следующие утверждения.

**Лемма 2.** Начиная с некоторого номера  $N$  имеют место оценки

$$0 < \sqrt{\lambda_k} - \pi/2 - \pi(k-1) < b/(\pi/4 + \pi(k-1)). \quad (17)$$

**Следствие 1.** Пусть  $v_k(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_k}(1-x))$ , где  $\sqrt{\mu_k} = \pi/2 + \pi(k-1)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|y_k(x) - v_k(x)\|_{C[0,1]} &\leq \sqrt{2b}/(\pi/4 + \pi(k-1)), \quad k \geq N, \\ \sum_{k=N}^{\infty} \|y_k(x) - v_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 &\leq b^2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{3(\pi/4 + \pi(k-1))^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

**Лемма 3.** Биортогонально сопряженная система  $\{z_k(x)\}$  к системе  $\{y_k(x)\}$ ,  $k=1,2,3,\dots$ , определяется по формуле

$$\begin{aligned} z_k(x) = \sqrt{2}(\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) - \sqrt{\lambda_0} \cos \sqrt{\lambda_k} (\sin \sqrt{\lambda_0}(1-x)) / (\sqrt{\lambda_k} \cos \sqrt{\lambda_0})) / (1 + \\ + b^{-1} \cos^2 \sqrt{\lambda_k} + (b\lambda)^{-1} a \cos^2 \sqrt{\lambda_k}). \end{aligned} \quad (19)$$

**Теорема 1.** Системы  $\{y_k(x)\}$  и  $\{\sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))\}$ ,  $k=1,2,\dots$ , являются базисами Рисса в пространстве  $L_2(0,1)$ .

Пусть

$\eta_k(x) = \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))$ ,  $\xi_k(x) = \sqrt{2} \cos(\sqrt{\mu_k}(1-x))$   $k=1,2,3,\dots$ . Тогда, аналогично (18), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\eta_k(x) - \xi_k(x)\|_{C[0,1]} &\leq \sqrt{2b}/(\pi/4 + \pi(k-1)), \quad k \geq N, \\ \sum_{k=N}^{\infty} \|\eta_k(x) - \xi_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 &\leq b^2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{3(\pi/4 + \pi(k-1))^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Предположим, что  $g(x) \in L_2(0,1)$ . Тогда, с учетом (18), получаем

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^1 g(x) y_k(x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (21)$$

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^N \int_0^1 y_k^2(x) dx + 2b^2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{3(\pi/4 + \pi(k-1))^2} + 2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Аналогично (21), с учетом (20), находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^1 g(x) \eta_k(x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|g(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (23)$$

Так как функции  $\{y_k(x)\}$ ,  $k=1,2,3,\dots$  являются базисами Рисса в пространстве  $L_2(0,1)$ , тогда известно [9], что для любой функции  $g(x) \in L_2(0,1)$  справедлива

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot y_k(x), \quad (24)$$

где

$$g_k = \int_0^1 g(x) z_k(x) dx.$$

Умножим (24) скалярно на  $g(x)$  и воспользуемся неравенствами (21) и Коши-Буняковского. Тогда имеем:

$$M^{-1} \|g(x)\|_{L_2(0,1)} \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$|g_k| \leq \left| \int_0^1 g(x) y_k(x) dx \right| + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\lambda_k} |\cos \sqrt{\lambda_0}|} \left| \int_0^1 g^2(x) dx \right|.$$

Отсюда, с учетом (7), имеем:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \right)^{1/2} \leq M_0 \|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (26)$$

где

$$M_0 = \left[ M + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{|\cos \sqrt{\lambda_0}|} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2} \right] \sqrt{2}. \quad (27)$$

Из неравенств (25) и (26) заключаем:

$$M^{-1} \|g(x)\|_{L_2(0,1)} \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \right)^{1/2} \leq M_0 \|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (28)$$

где  $M$  и  $M_0$  определены, соответственно, соотношением (22) и (27).

Предположим, что  $g(x) \in C[0,1]$ ,  $g'(x) \in L_2(0,1)$  и  $g(1) = 0$ . Тогда имеем:

$$g_k = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \cdot \frac{b}{a - \lambda_k} \left( g(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 g(x) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) \sin \sqrt{\lambda_k} - \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^1 g'(x) \cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx, \quad (29)$$

где

$$\alpha_k = 1 + \frac{\cos^2 \sqrt{\lambda_k}}{b} + \frac{a \cos^2 \sqrt{\lambda_k}}{b \lambda_k} > 1. \quad (30)$$

Отсюда, с учетом (23) и (30), находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_k} |g_k|)^2 \right)^{1/2} \leq 2bm_0 \left| g(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 g(x) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right| + \sqrt{2}M \|g'(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (31)$$

где

$$m_0 = \sup_k \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Пусть  $g(x) \in C^1[0,1]$ ,  $g''(x) \in L_2(0,1)$ ,  $g(1) = 0$  и

$$J(g) \equiv b \left( g(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 g(x) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - g'(0) = 0.$$

Тогда из (29) получаем:

$$g_k = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \left[ \frac{a^2}{\lambda_k^2(a-\lambda_k)} g'(0) - \frac{a}{\lambda_k^2} g''(0) \right] \sin \sqrt{\lambda_k} - \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 g''(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx. \quad (32)$$

Отсюда, с учетом (21) и (30), находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k|)^2 \right)^{1/2} \leq m_1 |g'(0)| + \sqrt{2} M \|g''(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (33)$$

где

$$m_1 = 2 \left[ a^2 \left( \sup_k \left| \frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|} \right| \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} \right) + a \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (34)$$

Теперь предположим, что  $g(x) \in C^2[0,1]$ ,  $g'''(x) \in L_2(0,1)$ ,  $g(1) = 0$ ,  $J(g) = 0$  и  $g''(1) = 0$ . Тогда из (32) имеем:

$$g_k = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \left[ \frac{a^2}{\lambda_k^2(a-\lambda_k)} g'(0) - \frac{ab}{\lambda_k(a-\lambda_k)} g''(0) - \frac{a}{\lambda_k^2} g'(0) + \frac{b}{\lambda_k^2} g''(0) \right] \sin \sqrt{\lambda_k} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \cdot \frac{1}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k}} \int_0^1 g'''(x) \cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx. \quad (35)$$

Отсюда, с учетом (23) и (30), получаем:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} |g_k|)^2 \right)^{1/2} \leq m_2 |g'(0)| + m_3 |g''(0)| + \sqrt{2} M \|g'''(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (36)$$

где

$$m_2 = 4 \left[ a^2 \sup_k \left| \frac{\lambda_k}{\lambda_k - a} \right| \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^3} \right)^{1/2} + a \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2} \right], \quad (37)$$

$$m_3 = 4 \left[ ab \sup_k \left| \frac{\lambda_k}{\lambda_k - a} \right| \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^3} \right)^{1/2} + b \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (38)$$

Пусть,  
 $g(x) \in C^3 [0,1], g^{(4)}(x) \in L_2(0,1), g(1) = 0, J(g) = 0, g''(1) = 0,$   
 $g'''(0) - bg''(0) + ag'(0) = 0.$  Тогда из (35) имеем:

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\lambda_k^2 (\lambda_k - a)} g'''(0) + \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\lambda_k^2} \int_0^1 g^{(4)}(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} (1-x)) dx. \quad (39)$$

Отсюда, с учетом (21) и (30), находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} M \|g^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2m_4 |g'''(0)|, \quad (40)$$

где

$$m_4 = \sup_k \left( \frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(3), (7) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через  $B_{2,T}^2$  [7], совокупность всех функций  $u(x,t)$  вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Норму на этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^2} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

2. Через  $E_T^2$  обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^2 \times C[0, T].$$

Норма элемента  $z = \{u, a\}$  определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^2} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^2} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что  $B_{2,T}^2$  и  $E_T^2$  являются банаховыми пространствами.

### Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту  $u(x,t)$  решения  $\{u(x,t), a(t)\}$  задачи (1)-(3), (7) будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x) \quad , \quad (41)$$

где

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

Применим метод разделения переменных для определения иско-  
мых функций  $u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда из (1) и (2) имеем:

$$a_1(t)u_k'(t) + \lambda_k u_k(t) = F_k(t; a_0, u) \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (42)$$

$$u_k(0) + \delta u_k(T) = \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (43)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) - a_0(t)u_k(t), \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) z_k(x) dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Решая задачу (42), (43), находим:

$$\begin{aligned} u_k(t) = & \frac{\varphi_k e^{-\int_0^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}} + \int_0^t \frac{F_k(\tau; a_0, u)}{a_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}} d\tau - \\ & - \frac{\delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}} \int_0^T \frac{F_k(\tau; a_0, u)}{a_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}} d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (44)$$

После подстановки выражения  $u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) из (44) в (41) имеем:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} & \left\{ \frac{\varphi_k e^{-\int_0^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}} + \int_0^t \frac{F_k(\tau; a_0, u)}{a_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}} d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{\delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}} \int_0^T \frac{F_k(\tau; a_0, u)}{a_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}} d\tau \right\} y_k(x). \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь из (7), с учётом (41), получим:

$$a_0(t) = h^{-1}(t) \left\{ h'(t) - f(x_0, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t) y_k(x_0) \right\}. \quad (46)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты  $a(t)$  решения  $\{u(x, t), a(t)\}$  задачи (1)-(3), (7) подставим выражение (44) в (46):

$$a_0(t) = h^{-1}(t) \left\{ a_1(t) h'(t) - f(0, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left( \frac{\varphi_k e^{-\int_0^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}} + \int_0^t \frac{F_k(\tau; a_0, u)}{a_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}} d\tau - \frac{\delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}}{1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}}} \int_0^T \frac{F_k(\tau; a_0, u)}{a_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{\lambda_k ds}{a_1(s)}} d\tau \right) y_k(x_0) \right\}. \quad (47)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (7) свелось к решению системы (45), (47) относительно неизвестных функций  $u(x, t)$  и  $a_0(t)$ .

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (7) важную роль играет следующая

**Лемма 4.** Пусть  $\delta \geq 0$ ,  $a_1(t) > 0$ ,  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $f(x, t), f_x(x, t) \in C(D_T)$  и

$$b \left( \varphi(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 \varphi(x) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - \varphi'(0) = 0, \quad (48)$$

$$b \left( f(0, t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 f(x, t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - f_x(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (49)$$

Если  $\{u(x, t), a_0(t)\}$  - любое решение задачи (1)-(3), (7), то функции

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (44).

**Доказательство.** Пусть  $\{u(x, t), a_0(t)\}$  - любое решение задачи (1)-(3), (7). Тогда из уравнения (1), с учётом (49), имеем:

$$a_1(t) \left[ b \left( u_t(0, t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u_t(x, t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_{txx}(0, t) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + a_0(t) \left[ b \left( u(0,t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_x(0,t) \right] = \\
& = b \left( u_{xx}(0,t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u_{xx}(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_{xxx}(0,t) (0 \leq t \leq T). \quad (50)
\end{aligned}$$

Дважды интегрируя по частям, с учётом (3), с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_{xx}(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx & = -u_x(0,t) \sin \sqrt{\lambda_0} - \sqrt{\lambda_0} u(0,t) \cos \sqrt{\lambda_0} - \\
& - \lambda_0 \int_0^1 u(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \quad (0 \leq t \leq T) .
\end{aligned}$$

Тогда, в силу (4), имеем:

$$\begin{aligned}
& b \left( u_{xx}(0,t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u_{xx}(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_{xxx}(0,t) = \\
& = -\lambda_0 \left[ b \left( u(0,t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_x(0,t) \right]. \quad (51)
\end{aligned}$$

Поставляя (51) в (50) получим:

$$a_1(t) \omega'(t) + (a_0(t) + \lambda_0) \omega(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (52)$$

где

$$\omega(t) \equiv b \left( u(0,t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_x(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (53)$$

Далее, в силу (2) и с учётом (48), находим:

$$\omega(0) + \delta \omega(T) = b \left( \varphi(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 \varphi(x) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - \varphi'(0) = 0. \quad (54)$$

Из (52) и (54) ясно, что  $\omega(t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Следовательно, из (53) имеем:

$$b \left( u(0,t) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos \sqrt{\lambda_0}} \int_0^1 u(x,t) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx \right) - u_x(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (55)$$

Очевидно, что

$$\int_0^1 u_t(x,t) z_k(x) dx = \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 u(x,t) z_k(x) dx \right) = u'_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (56)$$

Далее, дважды интегрируя по частям, с учетом (55), имеем:

$$\int_0^1 u_{xx}(x,t) z_k(x) dx = -\lambda_k u_k(t). \quad (57)$$

Теперь умножив обе части уравнения (1) на функцию  $z_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), интегрируя полученное равенство по  $x$  от 0 до 1 и пользуясь соотношениями (56), (57) получаем, что удовлетворяется уравнение (42).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (43).

Таким образом,  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) является решением задачи (42), (43). А отсюда, непосредственно следует, что функции  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (44). Лемма доказана.

Очевидно, что если  $u_k(t) = \int_0^1 u(x,t) z_k(x) dx$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) является ре-

шением системы (44), то пара  $\{u(x,t), a_0(t)\}$  функций  $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y_k(x)$  и  $a_0(t)$  является решением системы (45), (47).

Из леммы 4 следует, что имеет место следующее

**Следствие.** Пусть система (45), (47) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (7) имеет решение, то оно единственно.

Теперь рассмотрим в пространстве  $E_T^2$  оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) y_k(x),$$

$$\Phi_2(u, a) = \tilde{a}_0(t),$$

а  $\tilde{u}_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $\tilde{a}_0(t)$  равны, соответственно, правым частям (44) и (47).

Нетрудно видеть, что

$$\left| 1 + \delta e^{-\int_0^T \frac{\lambda_k}{a_1(s)} ds} \right|^{-1} \leq 1.$$

Отсюда имеем:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^2 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0, T]} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^2 |\varphi_k| \right)^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} (1+\delta) \sqrt{3} \left[ \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + T \|a_0(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right], \quad (58)$$

$$\|\tilde{a}_0(t)\|_{C[0,T]} \leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \|a_1(t)h'(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{1/2} \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} (1+\delta) \left( \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + T \|a_0(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right) \right]. \quad (59)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1.  $\varphi(x) \in C^3[0,1], \varphi^{(4)}(x) \in L_2(0,1), \varphi(1) = 0, J(\varphi) = 0, \varphi''(1) = 0,$   
 $\varphi'''(0) - b\varphi''(0) + a\varphi'(0) = 0.$

2.  $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t), f_{xxx}(x, t) \in C(D_T), f^{(4)}(x, t) \in L_2(D_T),$   
 $f(1, t) = 0, J(f) = 0,$   
 $f_{xx}(1, t) = 0, f'''(0, t) - b f''(0, t) + a f'(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$

3.  $\delta \geq 0, 0 < a_1(t) \in C[0, T], h(t) \in C^1[0, T], h(t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T).$

Тогда из (58) и (59), с учётом (40), соответственно, получаем:

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^2} \leq A_1(T) + B_1(T) T \|a_0(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^2}, \quad (60)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) T \|a_0(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^2}, \quad (61)$$

где

$$A_1(T) = \sqrt{6M} \|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{3}m_4 |\varphi'''(0)| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} (1+\delta) \sqrt{T} \left( \sqrt{6M} \|f^{(4)}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{3}m_4 \|f'''(0, t)\|_{C[0,T]} \right),$$

$$B_1(T) = \sqrt{3} \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} (1+\delta),$$

$$A_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|a_1(t)h'(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{1/2} \left[ \sqrt{6M} \|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{3}m_4 |\varphi'''(0)| + \right. \right.$$

$$+ \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} \left( (1 + \delta) \sqrt{T} \left( \sqrt{6M} \|f^{(4)}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{3}m_4 \|f'''(0,t)\|_{C[0,T]} \right) \right) \Bigg\},$$

$$B_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} (1 + \delta) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из неравенств (60), (61) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^2} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)T \|a_0(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^2}, \quad (62)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1-3 и

$$(A(T) + 2)^2 B(T) < 1. \quad (63)$$

Тогда задача (1)-(3), (7) имеет в шаре  $K = K_R (\|z\|_{E_T^2} \leq R = A(T) + 2)$

пространства  $E_T^2$  единственное решение.

**Доказательство.** В пространстве  $E_T^2$  рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (64)$$

где  $z = \{u, a\}$ , компоненты  $\Phi_i(u, a_0)$  ( $i = 1, 2$ ) оператора  $\Phi(u, a_0)$  определены правыми частями уравнений (45), (47), соответственно. Рассмотрим оператор  $\Phi(u, a_0)$  в шаре  $K = K_R (\|z\|_{E_T^2} \leq R = A(T) + 2)$  из  $E_T^2$ .

Аналогично (41) получаем, что для любых  $z, z_1, z_2 \in K_R$  справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^2} \leq A(T) + B(T)T \|a_0(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^2}, \quad (65)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^2} \leq B(T)TR (\|a_{0_1}(t) - a_{0_2}(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^2}). \quad (66)$$

Тогда из оценок (65) и (66), с учетом (63), следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому в шаре  $K = K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a_0\}$ , которая является единственным решением уравнения (64), т.е. является единственным в шаре  $K = K_R$  решением системы (45), (47).

Функция  $u(x,t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^2$ , непрерывна и имеет непрерывные производные  $u_x(x,t)$  и  $u_{xx}(x,t)$  в  $D_T$ .

Из (29) нетрудно видеть, что

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_k} \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{1}{a_1(t)} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \left\| f_x(x,t) \right\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| a_0(t) \right\|_{C[0,T]} \left\| u(x,t) \right\|_{B_{2,T}^2} \right\}.$$

Отсюда следует, что  $u_t(x,t)$  непрерывна в  $D_T$ .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2)-(4) и (7) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно,  $\{u(x,t), a_0(t)\}$  является решением задачи (1)-(3), (7). В силу следствия леммы 4 оно единственно в шаре  $K = K_R$ . Теорема доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

**Теорема 3.** Пусть выполняются все условия теоремы 2 и выполнены условия согласования

$$\varphi(x_0) = h(0) + \delta h(T).$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре  $K = K_R (\|z\|_{E_T^2} \leq R = A(T) + 2)$  пространства  $E_T^2$  единственное классическое решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды. // Математическое моделирование. 2000, т.12, №1, с. 94 – 103.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических задач. -ДАН СССР,1969, т.85, №4, с.739-740.
3. Гордезиани Д.Г. Об одном методе решения краевой Бицадзе – Самарского.- Докл. семин. ИПМ Тбилисского университета, 1970, №2, с.38-40.
4. Гордезиани Д.Г., Джуаев Д.З. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного уравнения эллиптического типа.- Сообщ. АН ГССР, 1972, т.68, №4, с.289-292.
5. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997, т.33, №1, с.115-119.
6. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О сходимости спектральных разложений функций из класса Гельдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2000. т.36. №8. с.1069-1074.
7. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыюглы, 2010, 168 с.

## İKİNCİ TƏRTİB PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

A.Н.ИСКЯНДЯРОВА

### XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli parabolik tənlik üçün klassik olmayan sərhəd şərtli tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin varlığı və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə ekvivalentlikdən istifadə edərək qoyulmuş məsələnin varlığı və yeganəliyi göstərilir.

**Açar sözlər:** tərs sərhəd məsələsi, parabolik tənlik, Furiye üsulu, klassik həll.

## AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND ORDER PARABOLIC EQUATIONS WITH NON-CLASSIC BOUNDARY CONDITIONS

A.N.ISKANDAROVA

### SUMMARY

In the paper, an inverse value problem for the parabolic equations of the second order with non-classic boundary conditions is investigated. For this reason, first of all, the initial problem reduces to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness proves. Then, using these facts, the existence and uniqueness of the classical solution of the initial problem are proved.

**Key words:** Inverse boundary problem, parabolic equation, Fourier method, classic solution.

*Поступила в редакцию: 11.12.2023 г.*

*Подписано к печати: 27.12.2013 г.*